

מתמטיקה של חישוב המולד לפי רמב"ם

מאת פרופ' יעקב פרידמן
בית הספר הגבוה לטכנולוגיה בירושלים

על פי הרצאות בקורס "לוח העברי"
בסמינר "בית רבקה" כפר חב"ד

(1) מבוא

מאמר זה מציג ראשי פרקים של חישוב המולד לפי "הלכות קידוש החודש" פרקים יא'-יז' של "משנה תורה" לרמב"ם. זה יוכל לסייע ללומדי הלכות אילו. כמו כן פיתחנו מספר נוסחאות המבוססות על מודל של רמב"ם לתיאור תנועת השמש והירח. נוסחאות אילו נמצאות מאחורי הטבלאות של הרמב"ם לתיקונים, מנות בלשון הרמב"ם, לחישוב ראשוני של מיקום השמש והירח וחישוב רוחב הירח.

חישוב המולד מבוסס על ראיה של הירח החדש בהתחלת החודש. ראיה זו אפשרית כאשר המיקום היחסי בין השמש והירח מזמן ראיה מקיים אילוצים מסוימים. היות והמיקום של השמש והירח ביחס לכדור הארץ משתנה מהר, בחרו לתאר מיקום השמש והירח ביחס לגלגל בכוכבים, ולא ביחס לכדור הארץ. מסלול השמש ביחס לגלגל הכוכבים נקרא עיגולה של השמש (מכוון בעיקר ממזרח למערב) ומחולק ל-12 מזלות. מיקום השמש מוגדר על ידי מעלות, חלקים ושניות בעיגול זה כאשר מיקום 0 נבחר בהתחלת מזל טלה. מיקום הירח מוגדר על פי אורך ורוחב, כאשר אורך נמדד ביחס לעיגולה של השמש ורוחב מגדיר סטיה לצפון או לדרום ביחס לעיגולה זו.

לחישוב מיקום השמש והירח בזמן ראיה נצטרך לחשב מספר גדלים. על מנת להקל על נוסחאות לחישובם ותאור כללים משותפים לחישובים שונים אנו נשתמש בראשי תיבות הבאים: (1) מיקום השמש בגלגל השמש-מ"ש, (2) גובה השמש-מקום בעיגולה של השמש שבו השמש נראה הכי רחוק-ג"ש, (3) מיקום הירח ביחס לעיגולה של השמש-מ"י, (4) Y מסלול הירח-מיקום הירח בגלגל הקטן-מס"י, (5) מיקום הראש-מקום בעיגולה של השמש שממנו גלגל הירח נוטה צפונה-מ"ר. לחישוב הגדלים אלו אנו חייבים לדעת (על ידי מדידה) את ערכם בזמן מסוים הנקרא זמן העיקר. נסמן ערכו של גודל מסוים בזמן העיקר על ידי הוספה של "ע" בהתחלת ראשי תיבות של הגודל.

חישוב גדלים הנ"ל מתבצע לפעמים במספר שלבים, כאשר בשלב ראשון אנו מחשבים את הקירוב של הגודל הנקרא ערך האמצעי של הגודל. תיקון של הגודל, המקרב לגודל האמיתי, נקרא מנת הגודל. נסמן את קירוב של גודל על ידי הוספה של "ק" בהתחלת ראשי תיבות של הגודל. כאשר ישנן שני קירובים נסמן קירוב ראשון על ידי "ק1" וקירוב שני על ידי "ק2". קירוב ראשוני מחושב לפי הנחה שמהלך של גודל בגלגל שלו ביום אחד מהלך שווה [פ' יא, ג] הנקרא מהלך הגודל שנסמנו על ידי הוספה של "מה" בהתחלת ראשי תיבות של הגודל. קירוב ראשוני מחושב לפי נוסחה:

$$\text{גודל בזמן ראיה} = \text{גודל בזמן העיקר} + (\text{ימים מהעיקר} * \text{מהלך הגודל}) \quad (1).$$

2) חישוב מקום השמש האמיתי

- א. חישוב מיקום השמש האמצעי - קמ"ש לפי (1), כאשר מנת מיקום השמש מהמ"ש = $59'8''$, [פ' יב, א].
- ב. חישוב גובה השמש - ג"ש לפי (1), כאשר מהג"ש = $0.15''$, [פ' יב, ב].
- ג. מסלול השמש שמוגדר: מס"ש = ג"ש - קמ"ש [פ' יג, א] וחישוב מנת מסלול השמש - מנ"ש המוגדר לפי מס"ש בעזרת טבלה ב- [פ' יג, ד] או לפי נוסחה (3) בהמשך.
- ד. מקום השמש האמיתי מ"ש = מס"ש $\pm$ קמ"ש [פ' יג, ב, ה].

3) חישוב מקום הירח

- א. חישוב אמצע הירח - קמ"י לפי (1), כאשר מהמ"י = $13^{\circ}10'35''$ [פ' יד, א].
- ב. מציאת תיקון עבור זמן השקיע תז"ש לפי מ"ש. קירוב שני למקום הירח - קמ"י = קצ"י + תז"ש [פ' יד, ה].
- ג. חישוב אמצע מסלול הירח קמס"י לפי (1), כאשר מהמס"י = $13^{\circ}3'54''$ [פ' יד, ג].
- ד. חישוב מרחק כפול - מ"כ המוגדר: מ"כ = (מ"ש - קמ"י) 2 [פ' טו, א] וחישוב תיקון אמצע מסלול - תמ"ס לפי מ"כ בעזרת טבלה מ- [פ' טו, ג].
- ה. מסלול הנכון: מס"י = קמס"י + תמ"ס. [פ' טו, ג]
- ו. חישוב מנת המסלול שמהווה תיקון למיקום הירח מנמ"י לפי מס"י בעזרת טבלה מ- [פ' טו, ו] או נוסחה (5).
- ז. מקום הירח האמיתי מ"י = קמ"י $\pm$ מנמ"י [פ' טו, ד, ז].

4) חישוב רוחב הירח

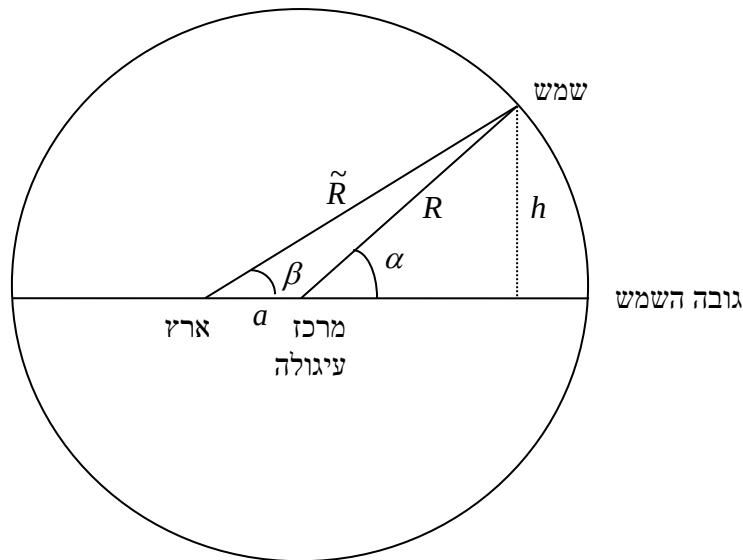
- א. חישוב מיקום הראש מ"ר לפי (1), כאשר מהמ"ר = $3'11''$ - [פ' טז, א, ב].
- ב. מסלול רוחב מס"ר המוגדר כ- מס"ר = מ"ר - מ"י [פ' טז, י].
- ג. חישוב רוחב הירח רח"י לפי מס"ר בעזרת טבלה מ- [פ' טז, יא, יג] או לפי נוסחה (6).

5) ידיעת הראיה

- א. חישוב אורך ראשון לפי: אורך 1 = מ"ש - מ"י [פ' יז, א].
- ב. בדיקת תנאי ראיה על פי ערך של אורך 1 [פ' יז, ג, ד].
- ג. חישוב אורך שני על ידי גרעון מאורך 1 מנה התלויה ב- מ"י [פ' יז, ה].
- ד. חישוב רוחב שני - רח"י 2 כתיקון של רח"י לפי מ"י [פ' יז, ט].
- ה. חישוב מעגל הירח - מעג"י כחלק של רח"י 2, התלוי במ"י, שמשמש לתיקון אורך [פ' יז, י].
- ו. חישוב אורך שלישי המתחשב הן באורך והן ברוחב (מעלות בין הירח והשמש): אורך 3 = מעג"י $\pm$ אורך 2 [פ' יז, יא].
- ז. תיקון אורך שלישי אל ידי מנת גובה המדינה בתלויה בעונת השנה לפי מ"ש המקרא קשת הראיה [פ' יז, יב].
- ח. בדיקת תנאי ראיה לפי ערך הקשת ו- אורך 1 [פ' יז, טו, כא].

6 פיתוח נוסחה עבור חישוב מנת מסלול השמש

מנת מסלול השמש זה תיקון של מקום השמש האמצעי על מנת להגיע למקום השמש האמיתי. סיבת התיקון היא מפני שהארץ לא נמצאת במרכז עיגולה של השמש. כאשר מרכז זה נמצא על קו מהארץ לכיוון השמש, השמש תהיה מרוחקת ביותר מהארץ. לכן מרכז זה נמצא על קו מהארץ לגובה שמש.



אנו סימנו α מסלול השמש שהיא זווית ממרכז עיגולה של השמש בין מקום השמש האמצעי ומיקום גובה השמש, R מסמל רדיוס של העגולה ו- $\tilde{R}$ מרחק מהארץ עד השמש ו- a מרחק מהארץ עד המרכז העיגולה של השמש. מנת השמש זה הפרש בין זווית ראיית השמש ממרכז העיגול α וזווית ראייתה מהארץ β .

$$\text{היות } \sin \alpha = \frac{h}{R} \text{ נקבל } h = R \sin \alpha. \text{ כמו כן } \sin \beta = \frac{h}{\tilde{R}} = \frac{R \sin \alpha}{\tilde{R}}. \text{ לפי משפט הקוסינוס}$$

$$\tilde{R}^2 = R^2 + a^2 + 2Ra \cos \alpha. \text{ לכן}$$

$$(2) \quad \sin \beta = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2Ra \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{R}\right) \cos \alpha}}$$

על מנת למצוא את $\frac{a}{R}$ נבדוק את זווית ראייה של השמש בדיוק רבע שנה אחרי שהיא הייתה בגובה

$$\text{השמש, שזה מתאים ל- } \alpha = 90^\circ. \text{ לפי פ' יג הל' ד' במקרא זה } \left(88 \frac{1}{60}\right)^\circ = 90 - 1 \frac{59}{60} = \beta. \text{ מ-}$$

(2) נקבל :

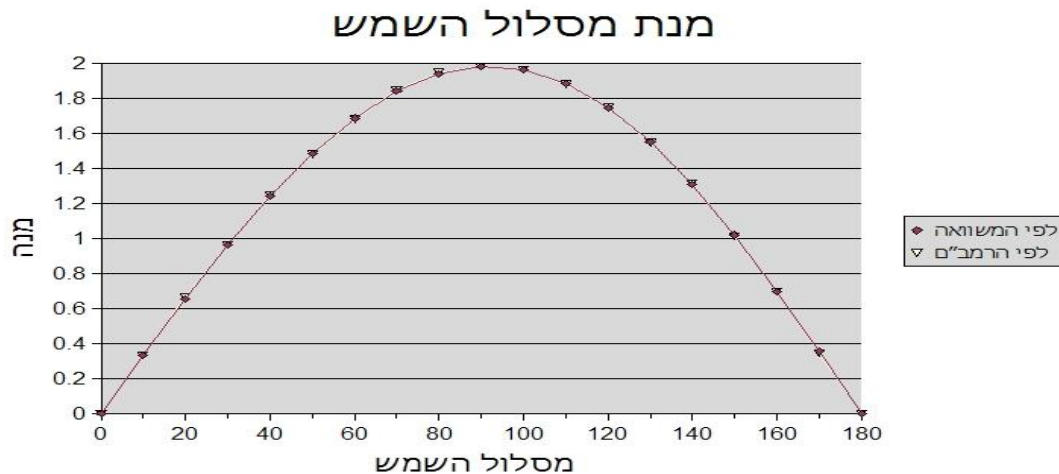
$$1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta}, \quad \left(\frac{a}{R}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} - 1 = \cot^2 \beta, \quad \frac{a}{R} = \cot \beta = 0.0346$$

לכן, מנת מסלול השמש שווה

$$, (3) \quad \alpha - \beta = \alpha - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1.0012 + 0.0693 \cos \alpha}} \right)$$

כאשר עבור מסלול השמש $\alpha > 90^\circ$ צריך להחליף את $\sin^{-1}$ ב- $\sin^{-1} - 180^\circ$.

להשוואה בין הטבלה ברמב"ם והנוסחה ציירנו ערכים של מנת המסלול לפי שתי שיטות. הגרף מראה שההתאמה היא מושלמת.



7) פיתוח נוסחה עבור חישוב מנת המסלול הירח

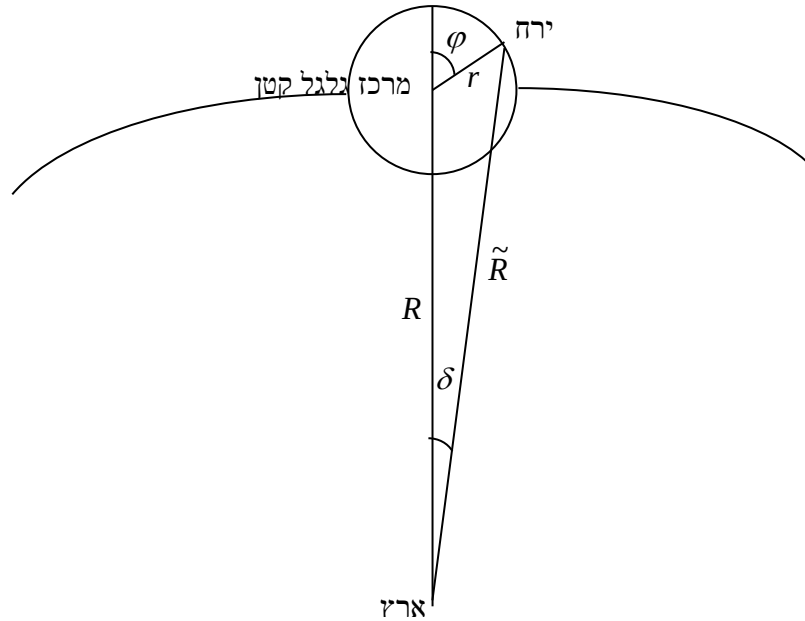
מיקום הירח מוגדר על פי אורך ורוחב, כאשר אורך נמדד ביחס לעיגולה של השמש. לחישוב מיקום אורך הירח, מניחים שהירח מסתובב בגלגל קטן ומרכז גלגל הקטן מסתובב בגלגל גדול. זווית (בכיוון השעון) בין הקרן מכדור הארץ דרך מרכז גלגל הקטן ומרכז גלגל הקטן לירח נקרא אמצע המסלול ואחרי התיקון מסלול הנכון. זווית (נגד כיוון השעון) בין מזל טלה ומרכז גלגל הקטן נקרא אמצע הירח. מנת המסלול הירח זה תיקון שצריך להוסיף או להוריד לאמצע הירח בגלל מיקומו בגלגל הקטן ולא במרכזו של גלגל זה.

באיור סימנו ב φ את המסלול הנכון, r רדיוס של גלגל הקטן, R רדיוס של גלגל הגדול, $\tilde{R}$ מרחק מהארץ לירח ו- δ מנת המסלול הירח.

לפי משפט הקוסינוס $\tilde{R}^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi$. ולפי משפט הסינוס

$$\text{לכן } \frac{\sin \delta}{r} = \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\tilde{R}} = \frac{\sin \varphi}{\tilde{R}}$$

$$(4) \quad \sin \delta = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \varphi}} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2\frac{R}{r} \cos \varphi}}$$



על מנת לקבוע את גודל של $\frac{R}{r}$, נציב בנוסחה (4) את מסלול הנכון $\varphi = 90^\circ$. לפי פ' ט"ו הל' ו מנת

המסלול עבור המסלול הנכון זה שווה $\delta_0 = 5^\circ 5'$. הצבה זו נותנת

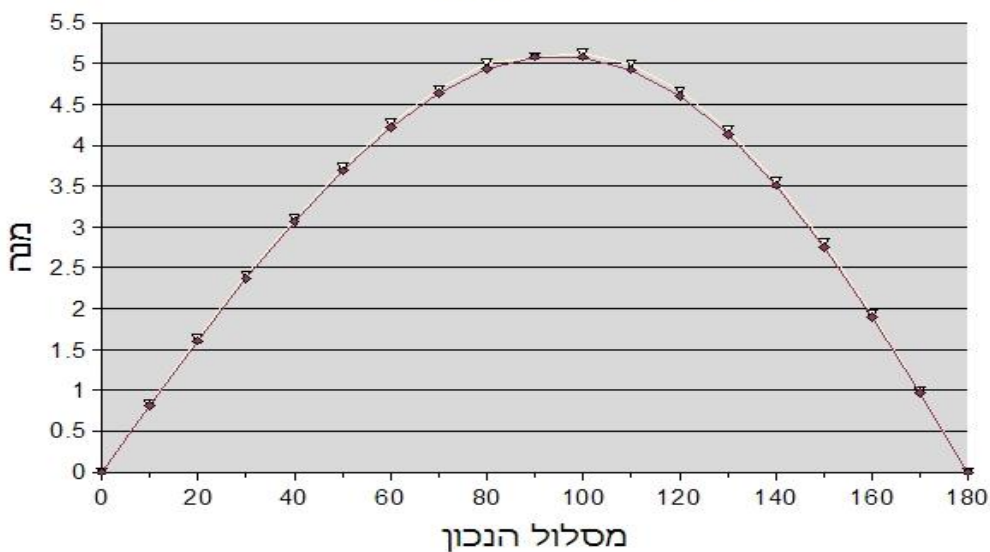
$$\sin \delta_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2}}, \quad \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \delta_0} - 1 = \cot^2 \delta_0, \quad \frac{R}{r} = \cot \delta_0 = 11.2417$$

מכאן מנת המסלול הירח שווה

$$(5) \quad \delta = \sin^{-1} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{127.3761 + 22.4834 \cos \varphi}}$$

להשוואה בין הטבלה ברמב"ם והנוסחה ציירנו ערכים של מנת המסלול לפי שתי שיטות. הגרף מראה שההתאמה היא די טובה.

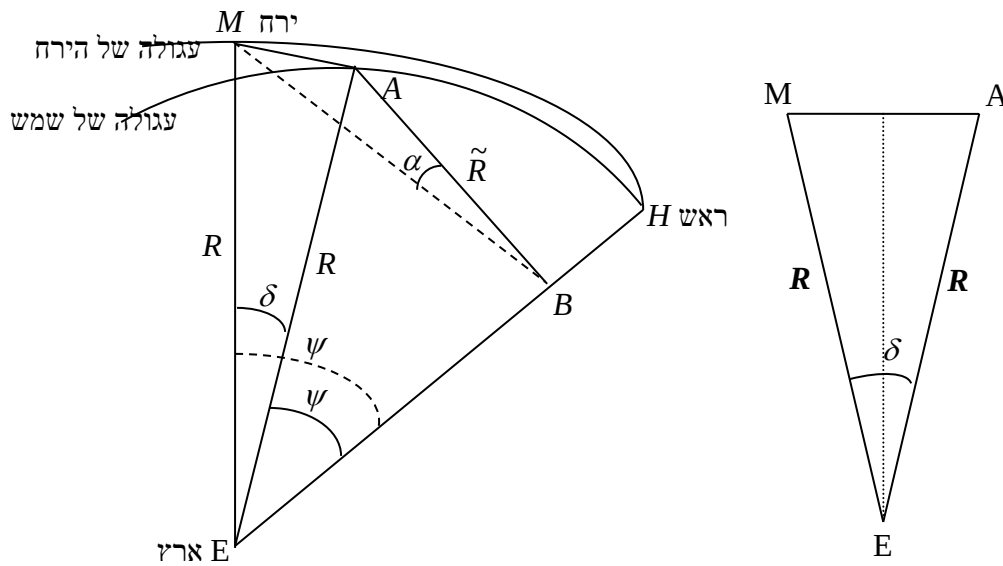
מנת מסלול הירח



(8) פיתוח נוסחה עבור חישוב רוחב הירח

רוחב הירח מודד זווית מארץ לכיוון הירח וכיוון נקודה בעיגולה של השמש בעלת אורך שווה לאורך הירח. רוחב זה מוגדר לפי מסלול רוחב המוגדר כהפרש בין אורך הירח ומקום הראש, כאשר נקודת הראש מוגדרת כנקודה בעיגולה של השמש שממנה מתחיל הירח לנטות לצפון.

באיור אנו ציירנו חלק מעגולות של השמש והירח. E מסמן מקום הארץ, M מסמן מקום הירח, A מסמן נקודה בעיגולה של השמש בעלת אורח שווה לאורך הירח, H מסמן מקום הראש, ψ מסמל מסלול רוחב מס"ר ו- δ מסמן רוחב הירח.



על מנת למצוא נוסחה לרוחב הירח, הורדנו אנכים מנקודות M ו- A על הישר EH וסימננו נקודות חיתוך B . הזווית α בין הישרים BA ו- BM היא זווית בין המישורים של עיגולת השמש ושל עיגולת הירח. זווית זו שווה לרוחב הירח כאשר מסמל מסלול רוחב שווה $\psi = 90^\circ$, שלפי פ' ט"ז הל' י"א שווה ל- 5° . לכן $\alpha = 5^\circ$.

קל לראות שבמשולש שווה שוקיים $\triangle EMA$ ארך $|\overline{MA}| = 2\tilde{R} \sin \frac{\delta}{2}$. אבל אורך זה ממשולש

שווה שוקיים $\triangle BMA$ שווה $2 \cdot 0.0436 \tilde{R} = 2\tilde{R} \sin \frac{\alpha}{2} = 2\tilde{R} \sin 2.5^\circ$, כאשר

$$\tilde{R} = R \sin \psi \quad \text{לכן}$$

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{|\overline{MA}|}{2R} = \frac{2 \cdot 0.0436 \tilde{R}}{2R} = \frac{0.0436 R \sin \psi}{R} = 0.0436 \sin \psi$$

$$(6) \quad \delta = 2 \sin^{-1}(0.0436 \sin \psi) = 2 \sin^{-1}(0.0436 \sin \text{סמ"ר})$$

להשוואה בין הטבלה ברמב"ם והנוסחה ציירנו ערכים של מנת המסלול לפי שתי שיטות. הגרף מראה שההתאמה היא מושלמת.

